学校编码：10384　　　　　　　　　　　　　　　　分类号 ____ 密级 _____

学　　号：B200323001　　　　　　　　　　　　　　　UDC _____

厦门大学

博　士　学　位　论　文

优化计算的神经网络模型及其稳定性分析

Neural Networks for Optimization and Their Stability Analysis

沈 喜 生

指导教师姓名：　程 立 新　教 授

专 业 名 称：　基　础　数　学

论文提交日期：　2006 年　5　月

论文答辩时间：　2006 年　6　月

学位授予日期：　2006 年　　月

答辩委员会主席：龚贵华　教授

评　　阅　　人：__________

2006 年　5　月

理 学 博 士 学 位 论 文

优化计算的神经网络模型及其稳定性分析

沈 喜 生

厦 门 大 学

二 〇 〇 六 年 五 月

NEURAL NETWORKS FOR OPTIMIZATION AND THEIR STABILITY ANALYSIS

Supervisor: Prof. Lixin Cheng

By

Xisheng Shen

A dissertation submitted to the

School of Mathematical Sciences

XIAMEN UNIVERSITY

for the degree of

DOCTOR OF PHILOSOPHY

in

MATHEMATICS

May, 2006

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果．本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明．本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任．

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定．厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版．保密的学位论文在解密后适用本规定．

本学位论文属于

1、保密（　），在　　　年解密后适用本授权书．

2、不保密（　）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

摘　要

递归神经网络具有较强的优化计算能力，是目前神经计算应用最为广泛的一类神经网络模型．本文针对约束鞍点问题和球覆盖最小半径的计算问题，分别利用投影法、对目标函数加上很小“扰动函数”的逼近法、罚函数法和梯度法等建立神经网络模型进行求解，并基于 LaSalle 不变集原理和 Lyapunov 直接法等工具，对模型的动态特性进行研究，从而设计出避免陷入局部极小的优化计算神经网络模型．全文共分五章：

第一章 简要回顾了优化计算神经网络研究的发展概况，以及利用神经网络求解鞍点问题和球覆盖最小半径问题的研究现状．

第二章 通过投影法把 Hilbert 空间中的鞍点问题转化为某动态系统的平衡点问题，并利用抽象空间常微分方程理论证明了该动态系统解的存在唯一性．然后通过把 LaSalle 不变集原理推广到 Hilbert 空间，给出了平衡点的大范围渐近稳定性条件．

第三章 把约束鞍点问题转化为等价的无约束问题，然后利用投影法构造了一个神经网络模型进行求解，并利用第二章结论证明了在适当条件下，模型大范围收敛于问题的精确解．本模型还可用于求解目标函数具有连续和离散变量的极小极大问题．该模型包含文献 [1, 2] 作为特例，推广并减弱了文献 [2–5] 中的稳定性和收敛性条件．仿真结果表明，该模型是有效的．

第四章 通过对目标函数加上一个很小但性质较好的扰动函数，利用逼近法构造一个新的神经网络模型来求解约束鞍点问题，并证明：无须另外的凸性假设，模型均大范围指数收敛于问题的逼近解，从而能够快速求解文献 [1, 2] 不能求解的问题．仿真结果表明，该模型是有效的．

第五章 针对 $\mathbb{R}^n$ 中球覆盖最小半径的计算问题，给出了新的计算公式，然后基于罚函数法建立一个神经网络模型进行求解，并利用 Lyapunov 直接法和 LaSalle 不变集原理证明了模型的平衡点集具有大范围吸引性且问题的（严格）极大值点等价于模型的（渐近）稳定平衡点．仿真结果表明，模型是有效的．对于球数为 $2n$ 和 $n+1$，还分别严格计算出了最小半径值．

关键词　神经网络；大范围稳定性；鞍点问题；球覆盖

Abstract

Recurrent neural networks have powerful computational capabilities, and are one of the most important types in neurocomputing. By means of the projection method, adding a small disturbing function to the objective function, the penalty method, and the gradient method, this dissertation proposes several neural networks for solving saddle point problems and minimum radius of ball-coverings problems, and investigates the stability of the proposed networks by the LaSalle invariance principle and the Lyapunov method, so as to design neural networks which avoid getting stuck in the local minimum. It is divided into five chapters.

Chapter 1 presents a survey of the study of optimization computing by neural networks, including the stability analysis for recurrent neural networks, and neural networks for solving saddle point problems and minimum radius of ball-coverings problems.

Chapter 2 converts the solutions of saddle point problems in Hilbert spaces into the equilibrium points of some dynamic system by means of the projection method, and gives some conditions of global asymptotic stability by extending the LaSalle invariance principle to Hilbert spaces. The results in this chapter are the theoretical key links in the construction of the neural networks in the next two chapters.

In chapter 3, it first proposes a neural network for constrained saddle point problems by means of the projection method, then shows that the proposed network is globally asymptotically stable under some mild conditions. The proposed network also can be applied to minimax problems involving discrete and continuous variables. The proposed network contains those in [1, 2] as its special cases, and the obtained stability results extend and weaken those in [2–5]. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed network.

Chapter 4 presents a neural network for saddle point problems by adding a small disturbing function to the objective function, and shows that the proposed network is globally exponentially stable and the solution of the problem is approximated globally and exponentially, without any additional convexity assumptions. Thus, it can exponentially solve saddle point problems, including those problems which the existing models in [1, 2] can not solve. Simulation results demonstrate further the effectiveness of the proposed network.

Chapter 5 first presents a formulation of minimum radius of ball-coverings of the unit sphere in $\mathbb{R}^n$, then proposes a neural network based on the penalty method, and shows that the trajectory of the network converges to the collection of the equilibria and that the (strict) maximizers are equivalent to the (asymptotically) stable equilibria. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed network. And for $n+1$ and $2n$ ball-coverings, it also presents exact minimum radius respectively.

Keywords neural network; global stability; saddle point problem; ball-coverings

目　录

摘　要 i

Abstract ii

第一章　绪论 1

1.1 优化计算神经网络研究发展回顾 1

1.1.1 神经网络的优化计算 1

1.1.2 递归神经网络的稳定性 2

1.1.3 鞍点问题的神经计算 3

1.1.4 球覆盖最小半径的神经计算 4

1.2 本文主要内容 4

第二章　Hilbert 空间中鞍点问题的动态系统模型及其稳定性分析 6

2.1 动态系统模型 6

2.2 解的存在性和唯一性 8

2.3 稳定性分析 12

第三章　精确求解约束鞍点问题的神经网络模型 16

3.1 鞍点问题解的特征 16

3.2 神经网络模型 19

3.3 稳定性分析 21

3.4 应用及数值仿真 25

3.4.1 非线性凸规划问题 25

3.4.2 极小极大问题 28

第四章　逼近法求解鞍点问题的神经网络模型 33

4.1 逼近解及其收敛性 33

4.2 神经网络模型及其指数稳定性 37

4.3 数值仿真 38

第五章　单位球面球覆盖最小半径的计算及其神经网络模型 43

5.1 球覆盖的最小半径 43

5.2 神经网络模型 46

5.3 稳定性分析 47

5.4 数值仿真 49
5.5 定理 5.1.4 的证明 51
参考文献 57
攻读博士学位期间所发表的论文 64
致 谢 65

Contents

Abstract (in Chinese) i
Abstract (in English) ii

Chapter 1 Introduction 1
1.1 Survey of the Study of Optimization Computing by Neural Networks 1
1.1.1 Optimization Computing by Neural Networks 1
1.1.2 Stability of Recurrent Neural Networks 2
1.1.3 Neural Computation of Saddle Point Problems 3
1.1.4 Neural Computation of the Minimum Radius of Ball-Coverings 4
1.2 Outline of This Dissertation 4
Chapter 2 A Dynamic System for Saddle Point Problems in Hilbert Spaces and Its Stability Analysis 6
2.1 A Dynamic System 6
2.2 Existence and Uniqueness of Solutions 8
2.3 Stability Analysis 12
Chapter 3 A Neural Network for Constrained Saddle Point Problems 16
3.1 Criterion for the Solutions of Saddle Point Problems 16
3.2 A Neural Network Model 19
3.3 Stability Analysis 21
3.4 Applications and Simulations 25
3.4.1 Nonlinear Convex Programming Problems 25
3.4.2 Minimax Problems 28
Chapter 4 A Neural Network for Constrained Saddle Point Problems: An Approximation Approach 33
4.1 Approximate Solution and Its Convergence Property 33
4.2 Neural Network Model and Its Globally Exponential Stability 37
4.3 Simulation Examples 38
Chapter 5 Computation of Minimum Radius of Ball-Coverings for the Unit Sphere and Its Neural Network Model 43

5.1 Minimum Radius of Ball-Coverings 43
5.2 Neural Network Model 46
5.3 Stability Analysis 47
5.4 Simulation Examples 49
5.5 Proof of Theorem 5.1.4 51
References 57
Papers Published in the Period of PH. D. Education 64
Acknowledgement 65

第一章 绪论

1.1 优化计算神经网络研究发展回顾

自 1943 年 McCulloch 和 Pitts 的工作 [6] “从原理上说明了神经网络可以计算任何逻辑函数”以来，现代神经网络的研究工作已有六十多年的历史．神经网络是范围很广的研究领域，根植于神经科学、数学、统计学、物理学、计算机科学、工程学、生物学和心理学等专业领域．它是对生物神经系统 ——特别是人脑的抽象和模拟，在工程、科学、数学、医学、金融等极其广泛的领域都有大量应用，比如：模式识别、图像处理、控制与优化、信号处理、函数逼近、建模等 [7–21]．

递归神经网络具有较强的优化计算能力，也是目前神经计算应用最为广泛的一类神经网络模型．自 1982 年 Hopfield 提出著名的 Hopfield 神经网络模型 [22, 23] 以来，许多学者对利用神经网络求解优化问题产生了极大的热情，提出了许多优化计算的神经网络模型 [24–43]．

1.1.1 神经网络的优化计算

优化问题大量存在于现实生活中，特别是在科学、经济和工程中，许多新的进展都依赖于相应优化问题最优解的计算 [44]．人们已对优化计算进行了大量的研究，提出了许多有效的算法．但一些对计算时间要求比较苛刻的实时应用，如机器人在线优化等 [45–47]，传统的数值算法因实时性不强而无法使用，这促使人们寻求适用于大规模并行处理的优化算法 [22–39]．

神经网络是模仿生物神经系统而设计的、具有大量连接的并行分布式处理器，它具有通过学习获取知识并解决问题的能力，且知识分布存储在连接权值中．并行处理结构使其适合于采用 VLSI（very-large-scale-integrated）、光学器件和并行处理技术实现 [48–50]．因此，神经网络比传统数值算法迅速快捷．

利用电路实现神经网络模型（即一组微分方程组）的思想最早由 Hopfield 于 1982 年提出，他同时引入“计算能量函数”的概念，将优化问题的准则表示为神经网络的能量函数 [22–25]．与经典数值计算不同，其求解过程是自动完成的．基于 Hopfield 的思想，二十多年以来，人们提出了许多优化

计算的神经网络模型，例如：Chua, Kennedy, Lin 等基于罚函数法对 Hopfield 网络模型存在的问题进行修正，并用来求解一大类优化问题 [27–29]；Zhang, Constantinides 和 Cichocki, Unbehauen 等提出基于（增广）Lagrange 乘子法的神经网络模型 [31–33]；Maa 和 Shanblatt 为了克服 Chua 网络模型 [29] 中罚系数趋于无穷大的缺点，提出一种两阶段优化神经网络模型 [35]；Xia, Wang 等提出投影神经网络模型 [3, 4] 等.

神经网络求解优化问题的实质是将优化问题的最优解转化为神经动态系统的平衡状态，任给系统一个初始状态，让系统演化到稳定状态就得到问题的解．因而，如何将优化问题的解与神经动态系统的平衡状态一一对应起来是神经网络求解优化问题的关键．对于复杂的优化问题，目前绝大多数优化神经网络本质上都是基于梯度法，因而往往容易陷入局部极小点．如何把求优化问题全局最优解的思想和方法引进神经网络，建立全局优化的神经网络模型，是一个值得研究的重要课题.

本文主要针对约束鞍点问题和球覆盖最小半径的计算问题，分别利用投影法、对目标函数加上很小“扰动函数”的逼近法、罚函数法和梯度法等方法，设计出避免陷入局部极小的全局优化神经网络模型.

1.1.2 递归神经网络的稳定性

递归神经网络是一个神经动态模型，对一个给定的初始输入，网络的响应可能收敛到一个稳定的输出，也可能振荡、无限地增大、或者遵循一种混乱的模式．1982 年，Hopfield 的另一个贡献是利用 Lyapunov 稳定性定理分析网络的稳定性 [22, 23]，从而设计出具有不同功能的神经网络模型．比如，联想记忆神经网络应具有多个分别对应于要存储的记忆模式的局部渐近稳定平衡点 [48]，而优化计算神经网络的理想情形是有且只有一个全局渐近稳定的平衡点 [24].

利用神经网络进行优化计算，必须对模型的动力学行为进行分析，要求神经网络能可靠地工作，即能收敛到网络的平衡点．并且，在实际应用中往往需要提高网络趋于平衡状态的速度，即要求网络具有全局指数稳定性 [51, 52]．此外，网络的平衡点一般是事先不知道的，其存在性是稳定性研究的前提 [53, 54]．因此，稳定性分析是神经网络综合设计的基础，已成为当前研究的一个热点 [51–56].

Lyapunov 直接法和 LaSalle 不变集原理 [57] 是神经网络稳定性分析的常用工具，它们的应用都是构造满足要求的“正定”函数．对于一般的神经网

络，“正定”函数的构造并不是轻松的事情．本文所提出的优化神经网络模型的稳定性分析都是通过寻找满足特定性质的“正定”函数．由于 Lasalle 不变集原理在稳定性分析中的重要性，本文第二章将其推广到 Hilbert 空间中，并运用于分析 Hilbert 空间中鞍点问题所对应动态系统的稳定性．

1.1.3 鞍点问题的神经计算

鞍点问题是一类重要的优化问题，产生于很多重要领域，比如最优化理论、博弈论、自动控制、函数逼近、形位误差评定等（比如，见 [58–63]），它包含通常的数学规划问题作为特例．鞍点问题是求目标函数在给定约束下的鞍点．数学规划问题和许多极小极大、极大极小问题的求解都可以转化为相应鞍点问题的求解．与一般的极小极大、极大极小问题一样，鞍点问题不是简单地求目标函数的极大值或极小值，因而比普通数学规划问题更难以求解．

在许多科学和工程应用中，很多情况下需要求上述问题的实时解．然而，对于高维或结构复杂的问题，传统数值方法（例如，[64–66]）一般无能为力，因为其计算时间严重依赖于问题的维数和结构．随着 VLSI 技术的发展，以及神经网络的诸多优点，如大规模并行处理、易于硬件实现等 [48–50]，神经网络已成为实时求解优化问题的一条有效途径 [22, 23, 27, 32, 67, 68]．特别是在电路实现的基础上，神经网络方法的整个计算过程是真正并行和分布的，因而，其计算速度远比传统数值方法快得多．

近来，人们已经构造出许多神经网络来求解优化问题（例如，[1–5, 24–26]）．其中，文献 [1] 构造了一种求解无约束极小极大问题的神经网络模型，并证明了在某种凸性假设下，模型是渐近稳定的，然而其结构较复杂；文献 [2] 和 [26] 分别建立了求解二次极小极大问题的神经网络模型，并在相应矩阵为正定的假设下，证明了模型的稳定性．上述求解极小极大问题的模型都是通过求目标函数的鞍点来获得问题的解．另外，文献 [3–5] 等分别对动态投影系统的稳定性进行了研究，给出了一系列稳定性条件．虽然鞍点问题可转化为动态投影系统，但一般鞍点问题并不满足文献 [3–5] 中的稳定性条件．对于一般的约束鞍点问题，目前还没有出现满足大范围渐近（或指数）稳定性的全局优化神经网络模型．

本文将在第二章把 Hilbert 空间中的鞍点问题转化为求某动态系统的平衡点问题；在第三章和第四章分别建立满足大范围渐近稳定性和大范围指数稳定性的全局优化神经网络模型求解约束鞍点问题．其中，第三章的模型包

含文献 [1, 2] 中的模型为特例，所得结果推广并减弱了文献 [2–5] 中的稳定性和收敛性条件；而第四章的模型则不需附加假设，自动具有大范围指数稳定性.

1.1.4 球覆盖最小半径的神经计算

单位球面的球覆盖问题“单位球面至少可被多少个不含原点的球覆盖”是 Banach 空间几何学，特别是 Banach 空间单位球几何理论研究的新内容，最近由程 [69, 70] 等率先提出并发展起来. 它与其他从“整”球出发，用球“覆盖”集合或用其他几何形体覆盖球的主题（如，Mazur 交性质 [71]，装球问题 [72, 73]，Plank 问题 [74]，拓扑度问题 [75] 等）一起成为 Banach 空间几何学、凸分析和非线性泛函分析的重要组成部分.

一般 Banach 空间中球覆盖的最少个数以及球覆盖的存在性特征已经由程 [69, 70] 给出，特别地他证明了 n 维 Banach 空间中球覆盖的最少球数为 $n+1$（范数光滑时），对称球覆盖的最少球数为 $2n$. 然而，球覆盖最小半径的计算问题还没有得到解决. 对于两类特殊的情形，本文在第五章分别严格计算出了其球覆盖的最小半径. 对于一般情形的最小半径问题，本文在第五章将其归结为一个约束极小极大问题. 对该问题直接求精确解或用其他数值方法求精确解还是比较困难的. 鉴于神经网络强大的计算能力和在优化计算中的成功应用，本文第五章基于罚函数法建立一个神经网络模型求解上述问题，并利用 Lyapunov 直接法和 LaSalle 不变集原理对模型的稳定性进行分析.

1.2 本文主要内容

本文针对约束鞍点问题（包含了数学规划问题和部分极小极大问题）和球覆盖最小半径的计算问题，分别利用投影法、对目标函数加上很小“扰动函数”的逼近法、罚函数法以及梯度法等建立神经网络模型进行求解，并基于 LaSalle 不变集原理和 Lyapunov 直接法等工具，对所建立的模型的动态特性进行研究，从而设计出易于硬件实现且避免陷入局部极小的优化计算神经网络模型. 全文共分五章：

第一章 绪论 简要回顾了优化计算神经网络研究的发展概况，以及利用神经网络求解鞍点问题和球覆盖最小半径问题的研究现状. 给出了本文主要内容.